№ 5 | май 2019
Издаётся Московским центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№5
май
2019

ТАЙНА УЛЫБКИ ДЖОКОНДЫ

ВОРОНКА КОРИОЛИСА

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

Enter

ВНИМАНИЕ! ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА II ПОЛУГОДИЕ

ПОДПИСАТЬСЯ НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»
можно в любом отделении связи Почты России или через интернет

Подписка на почте

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП
Индекс **11346**

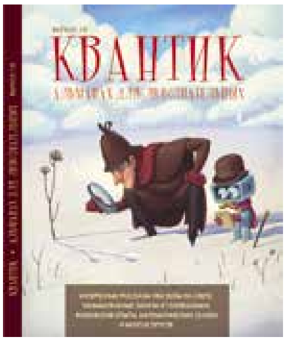
КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»
Индекс **84252**

Подписка на сайте vipishi.ru

КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ
оплата онлайн
Индекс **11346**

ИНТЕРНЕТ - ПОДПИСКА НА ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ
VIPISHI.RU

НАШИ НОВИНКИ



Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

- Альманах «Квантик». Выпуск 12,
- Альманах «Квантик». Выпуск 13,
- второй выпуск «Библиотечки журнала «Квантик» – книга С. Н. Федина «Перепутаница».

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), в интернет-магазине **kvantik.ru**, в магазинах «Библио-Глобус» и в других магазинах (список на сайте: **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 5, май 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 15.04.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

ВОРОНКА КОРИОЛИСА

Владимир Сурдин

Гаспа́р-Гюста́в де Кориоли́с (21 мая 1792 – 19 сентября 1843)

Начнём с простого опыта. Если у вас во дворе есть небольшая карусель, сядьте на неё вдвоём, друг против друга, раскрутите карусель и начните перебрасывать друг другу мяч. Не получается? Мяч не хочет лететь прямо? Но какая же сила уводит его в сторону? Учёные называют это *силой Кориолиса* в честь французского физика Гаспара-Гюстава Кориолиса, изучавшего движение тел на вращающихся основаниях, подобных нашей карусели или вращающейся планете. Вообще-то эта сила кажущаяся, фиктивная. На самом деле никакой особой силы, подобной силе тяжести или силе электрического притяжения, тут нет. Просто любое тело по инерции старается двигаться прямолинейно, а если вращающееся основание из-под него «убегает», то траектория получается изогнутой.

Как видим, форма траектории движущегося тела зависит от того, как движется само «основание», по которому это тело перемещается. Каждое такое «основание» физики называют *системой отсчёта*. Если по инерции, то есть при отсутствии действующих на него реальных физических сил, тело движется прямолинейно и равномерно (в частности – если оно покоится), то систему отсчёта, в которой это наблюдается, называют *инерциальной*. Если же на тело не действуют силы, а траектория тела при этом кривая или скорость его меняется, то «виновата» сама система отсчёта – она неинерциальная. Так что инерция тела лишь поддерживает его равномерное прямолинейное движение, а в любых отклонениях виновата неинерциальность системы отсчёта.

Проявление этого мы, как пассажиры, испытываем каждый раз, когда автомобиль трогается или тормозит. При этом нам кажется, что какая-то сила то прижимает нас к спинке сиденья, то толкает вперёд. А на самом деле это автомобиль под нами изменяет своё движение, а мы «по инерции» этому сопротивляемся. То же и с вращающейся подставкой: каждая её часть движется с разной скоростью в зависимости от расстояния от оси вращения. Поэтому перемещающееся по такой подставке (в такой системе отсчёта) тело «чувствует себя» как на разгоняющемся или тормозящем автомобиле: физические силы на него не действуют, но движение относительно подставки меняется. Например, вращаясь на карусели, мы чувствуем центробежную силу, которая стремится сбросить нас с сиденья. А никакой силы-то и нету! Это сиденье «хочет» убежать из-под нас, а инерция нашего тела этому сопротивляется. Вот это-то и подобные ему явления и исследовал Гюстав Кориолис. Ну а раз никакой особой силы на вращающейся подставке нет, то лучше говорить не о «силе Кориолиса», а об «эффекте Кориолиса».

Мы с вами живём на вращающейся планете Земля. Она такая большая и вращается так медленно – один оборот в сутки, – что кажется нам неподвижной. Но в движении любых тел по поверхности Земли эффект Кориолиса проявляется.

Представьте, что мы с вами плывём на лодке вниз по течению реки, например Волги. Оглянитесь по сторонам: правый берег у реки возвышенный, а левый – низменный. Все ли реки отличаются этой особенностью? Нет. Только реки, текущие в Северном полушарии Земли; а в Южном полушарии всё наоборот: высокий берег – левый. Географы называют это «законом Бэра», а иногда – «эффектом Бэра», поскольку подметил такую особенность речных берегов петербургский академик Карл Бэр. Почему же реки ведут себя так?

Карл Эрнст фон Бэр
(17 февраля 1792 –
28 ноября 1876)

Потому что они текут по поверхности вращающейся планеты. Представим, что в Северном полушарии речка течёт с севера на юг, как Волга. А Земля, как известно, вращается с запада на восток. Чем ближе к экватору, тем больший круг в одно и то же время (например, в сутки) пролетает каждая точка Земли. Значит, речная вода течёт из мест, вращающихся медленно, в те, которые вертятся быстрее. Поэтому вода отстаёт от вращения Земли. Она ударяется о западный берег, подмывает его, делает обрывистым. Заметим, что западный берег на такой реке – правый.

Возьмём другую реку, текущую с юга на север. Тогда вода, которая быстро неслась у экватора вместе со всей поверхностью планеты на восток, будет попадать в места, где суша движется под ней всё медленнее. А сама она сохранит старую быстроту движения. Значит, вода в своём движении на восток будет обгонять русло реки, наплёскиваться на восточный берег и подмывать его. Но и в этом случае восточный берег тоже правый!

Теперь допустим, что река течёт с запада на восток, в ту сторону, куда вращается Земля. Тогда течение реки будет складываться с вращением планеты, что увеличит центробежную силу и погонит воду реки к югу, к экватору, подальше от оси вращения планеты. И вода будет подтачивать южный берег. Но как раз он при этом тоже окажется правым.

Наконец, возьмём последний случай. Предположим, что река течёт с востока на запад. Произойдёт обратное: скорость вращения реки вокруг земной оси замедлится по сравнению с берегами, центробежная сила ослабнет, вода будет ударяться о северный берег. А он в данном случае и есть правый! Как видим, в Северном полушарии река всегда стремится подмыть правый берег, делая его высоким. А в Южном полушарии, там, где люди ходят «вниз головой», всё наоборот – реку сносит влево. На самом деле – туда же, куда и в Северном полушарии, но для антиподов это влево.

Чем ближе мы к экватору, тем слабее эффект Кориолиса, а непосредственно в районе экватора он совсем исчезает, ведь как бы там ни двигался объект по поверхности Земли, он сохраняет своё расстояние от оси вращения планеты. Правда, центробежная сила при этом немного меняется, но это изменение у экватора направлено вверх или вниз, поэтому не влияет на траекторию тела вдоль поверхности. А вот в средних и высоких географических широтах спокойные равнинные реки точно следуют закону Бэра. Кстати, это хороший географический признак: видя на фотографии реку с обрывистым правым берегом, мы имеем основания думать, что она течёт в Северном полушарии.

Эффект Кориолиса появляется не только в течении рек, но и в движении воздушных масс и океанских течений. Например, все циклоны закручиваются в сторону вращения Земли (см. фото). Так же ведут себя океанские «реки» – течения Гольфстрим в Атлантике и Куросио в Тихом океане. Даже поезда сильнее подтачивают правый рельс в Северном полушарии.

Но часто можно услышать или прочитать, что эффект Кориолиса проявляется только на больших пространствах, а вот в небольшом сосуде, у себя дома, его заметить нельзя.

Окончание следует

Художник Анна Горлач

Амелия Алаева

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

Маша попросила своего старшего друга, профессора Ивана Петровича, выступить перед её одноклассниками с интересной темой. И вот, в раннее утро понедельника, Иван Петрович зашёл в класс. Дети, увидев профессора, разочарованно вздохнули, и лишь одна Маша радостно помахала ему рукой.

– Да, вижу, вы сегодня мало каши ели... – огорчённо сказал профессор.

– Нет, мы просто вас по телевизору видели, – сказал один из ребят. – Вы там про какие-то ужасно скучные математические формулы говорили...

– Далеко не вся математика состоит из скучных формул. Сегодня мы рассмотрим парадокс дней рождения! Какова, например, вероятность того, что из 30 человек двое родились в один день?

– Так, всего человек 30, значит, вероятность – 30/365, – начала быстро подсчитывать Маша.

– А 30/365 – это примерно 0,08, или 8%, – подсказал другой ученик, который уже успел достать калькулятор.

– Нет, Маша, ты считаешь, какую часть количество людей составляет от числа дней в году. И если людей больше 366, то вероятность у тебя больше 1 получится.

– Да... Наверное, можно немного подправить формулу?

– А вот и нет, – загадочно улыбнулся профессор. – Шанс того, что хотя бы двое из этих 30 родились в один день, превышает 50%.

– Но как? – закричали дети. Теперь уже проснулись даже сидящие за последней партой.

– Вероятность того, что у двух людей совпадут дни рождения, равна 1/365. Всего из 30 людей можно составить $30 \cdot 29/2 = 435$ пар.

– Но правильно ли подсчитывать пары? – возразила Маша.

– Хороший вопрос! Конечно, вероятность не может равняться 435/365, ведь это больше единицы. Мы не можем сложить вероятности совпадения дней рождения в каждой паре, потому что дни рождения могут совпадать сразу в нескольких парах. Но теперь вероятность более 50% уже не кажется такой большой.

– Но как всё-таки подсчитать вероятность правильно?

– Рассчитаем сначала вероятность того, что дни рождения всех людей будут различными. Возьмём наугад одного человека из группы и запомним его день рождения. Затем возьмём наугад второго человека: вероятность того, что у него день рождения не совпадёт с днём рождения первого человека, равна $1-\frac{1}{365}$. Затем возьмём третьего человека: вероятность того, что его день рождения не совпадёт с днями рождения первых двух (при условии, что дни рождения первых двух не совпали), равна $1-\frac{2}{365}$. По аналогии, для последнего человека вероятность несовпадения его дня рождения со всеми предыдущими будет равна $1-\frac{29}{365}$. Перемножая все эти вероятности, получаем вероятность того, что все дни рождения в группе различны. А вероятность того, что какие-то дни рождения совпадут, равна тогда

$$1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{29}{365}\right)\approx 0{,}71.$$

– А как вы думаете, где этот парадокс можно применить?

Дети громко начали обсуждать разные варианты. Никого из них толком не было ни слышно, ни понятно.

– Вот прекрасный пример, – отметил профессор.

– Но ничего ведь нельзя было разобрать из-за шума! – удивились некоторые.

– В этом-то и есть пример, – загадочно сказал профессор. – Вы знаете, что такое RFID-метки*?

Все отрицательно покачали головами.

– Это небольшие устройства, которые по радиочастоте передают своё «имя», то есть заложенную в них информацию. Например, они могут быть прикреплены к каждой коробке внутри грузовика. Когда грузовик заезжает на склад, специальное устройство чтения прямо при въезде считывает, какие товары

*RFID – Radio Frequency IDentification (англ.), радиочастотная идентификация.

Художник Алексей Вайнер

привезли. Ридер посылает сигнал, но некоторые метки могут ответить одновременно, как только что делали вы. Сигналы таких ответов накладываются друг на друга, и ничего нельзя разобрать.

Как решить эту проблему? Для этого есть разные алгоритмы. Некоторые основаны на том, что временной промежуток чтения меток разбивается на небольшие интервалы (слоты), а метки случайно выбирают интервал для передачи своего имени. Чем больше слотов, тем дольше будут считываться метки. Чем меньше слотов, тем выше вероятность наложения ответов и тем меньше меток будет успешно прочитано. Поэтому нужно поточнее прикинуть количество меток. Его можно оценить, исходя из общего количества слотов, во время которых был получен хотя бы один ответ. Для этого нужно решить похожую задачу: сколько в среднем различных дней рождения в группе из n человек.

Тут прозвенел звонок.

– Ну как, интересная была сегодняшняя тема? – поинтересовался Иван Петрович

– Очень! – дети дружно закивали головами.

Все потихоньку начали собираться и уходить на перемену. Маша подошла к профессору:

– Спасибо вам большое!

– Не за что, если понадоблюсь – зови, ведь на свете ещё много интересных вероятностных парадоксов, про которые можно рассказать!

УПРАЖНЕНИЯ

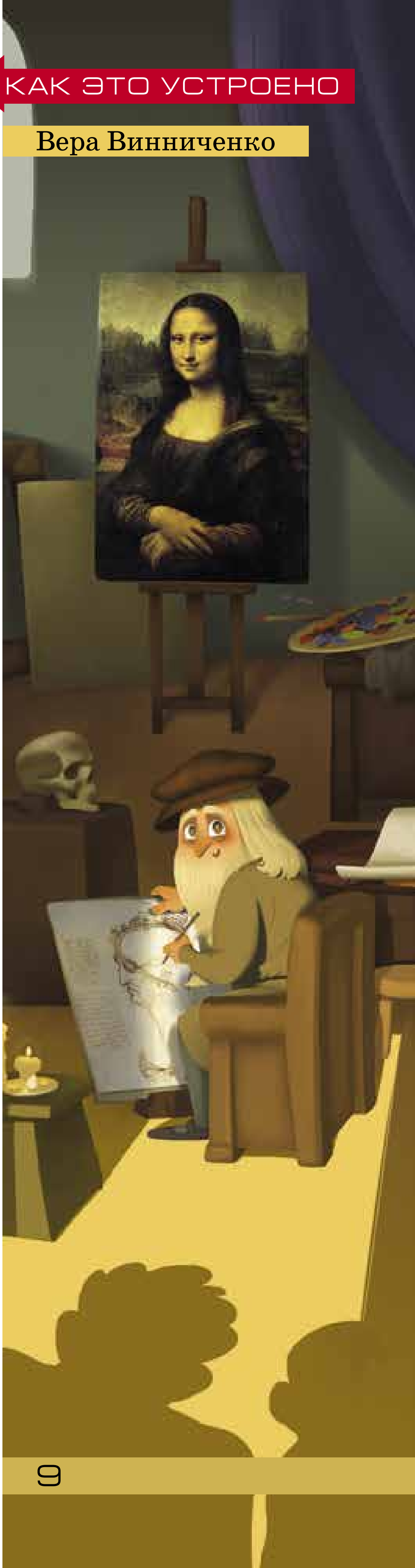
1. Какое минимальное число людей нужно взять, чтобы у каких-то двоих из них совпали знаки зодиака с вероятностью более 1/2?

2. Пусть Костя родился 29 февраля и учится в классе из 30 человек. С какой вероятностью в этом классе найдётся ещё один ученик с таким же днём рождения?

3. В группе 75 человек. Сколько в среднем среди них людей, чей день рождения больше не встречается ни у кого в группе? Оцените их количество как произведение общего числа людей и вероятности того, что у данного человека уникальный день рождения.

Тайна улыбки Джоконды

Вера Винниченко



Картина «Мона Лиза» Леонардо да Винчи (полное название «Портрет госпожи Лизы дель Джокóндо») считается одним из самых загадочных произведений живописи. Искусствоведы до сих пор спорят, куда подевались брови Моны Лизы, кто нарисован на картине; некоторые настаивают, что художник изобразил самого себя. Но самой большой тайной считается мистическая улыбка Джоконды. «Неопределённость её улыбки, едва зарождающейся и пропадающей... доносит до нас красочную полифонию духовной жизни» – радовался великий искусствовед В. Н. Гращенков. «Мы ощущаем присутствие существа, с которым можно говорить и от которого можно ждать ответа» – думал историк искусств Б. Р. Виппер, когда смотрел на картину. «Никто не разгадал её улыбку, никто не истолковал её мысли» – горевал З. Фрейд, величайший психиатр. А вот врач Кристофер Адур из Окленда считал, что улыбка Моны Лизы такая прекрасная и загадочная, потому что у дамы был паралич: она не могла пошевелить губами.

В 2004 году биолог Маргарет Ливингстон, профессор из Гарварда, смогла разгадать тайну улыбки Джоконды. Но чтобы понять, как Леонардо да Винчи добился своего «мистического» эффекта, нам нужно немного поговорить о том, как устроен человеческий глаз.

Свет, отражённый от видимых объектов, через зрачок попадает на *сетчатку* (рис. 1). Сетчаткой называется слой светочувствительных клеток. Они способны с помощью специальных белков

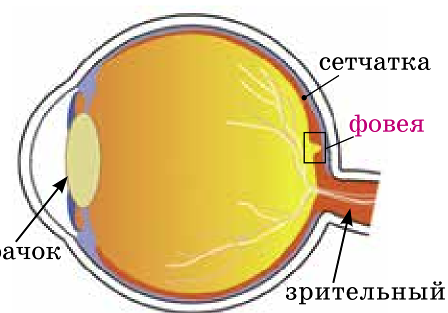
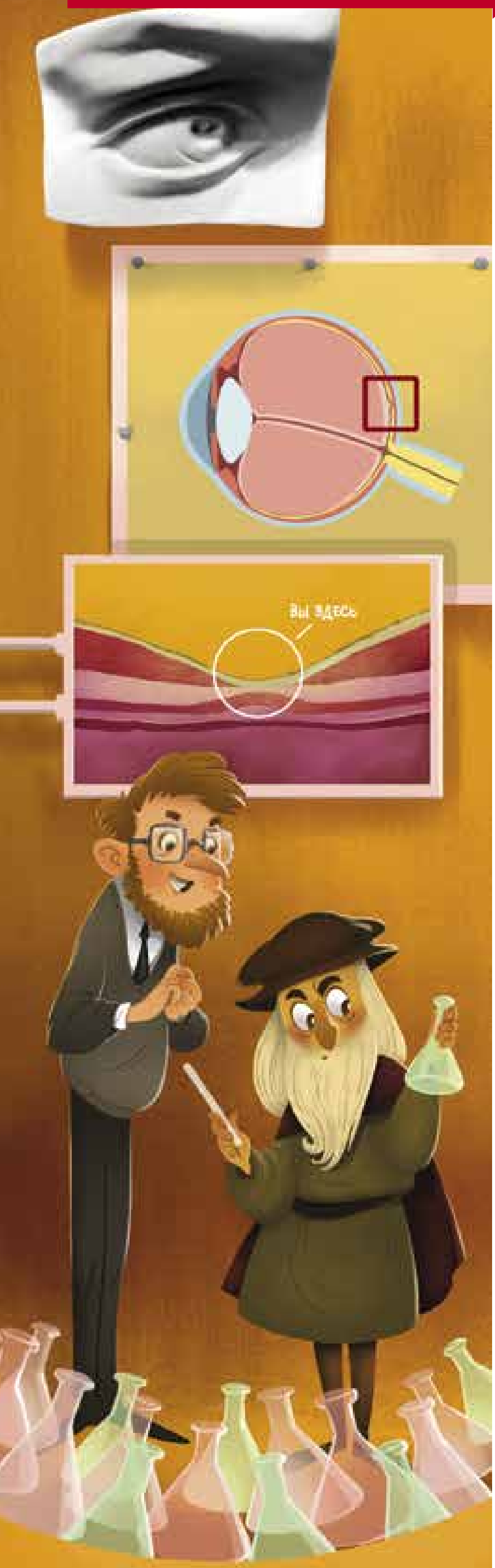


Рис. 1

(ретиналя) превращать энергию света в энергию электрического импульса. После того как свет преобразовался в электрический импульс, он поступает в головной мозг по зрительному нерву. То, что происходит в головном мозге с этим импульсом, – очень увлекатель-



ная история. Но мы сосредоточимся на том, что происходит в сетчатке глаза.

В сетчатке есть два типа светочувствительных клеток: *колбочки* и *палочки*. Колбочки отвечают за цветовое зрение, а палочки – за чёрно-белое. У нас, у людей, есть три вида колбочек: так называемые «синие», «зелёные» и «красные». Синие колбочки лучше всего преобразуют в электричество синий свет, зелёные – зелёный, а красные – красный. А все остальные цвета получаются путём комбинации этих трёх цветов.

Откуда же берётся, например, жёлтый цвет, если у нас для этого нет специальной жёлтой колбочки? Дело в том, что жёлтый свет чуть-чуть активирует и зелёные и красные колбочки одновременно. Этот комбинированный сигнал поступает в мозг, а мозг уже вычисляет: возникает ощущение жёлтого цвета.

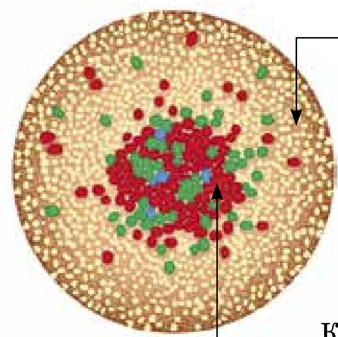
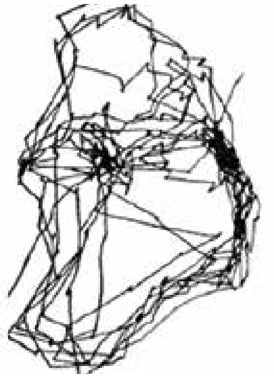
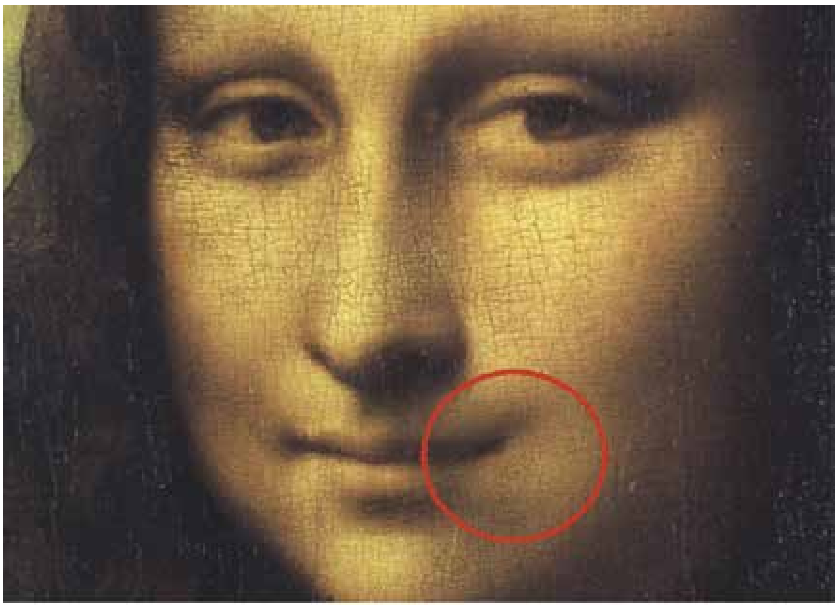


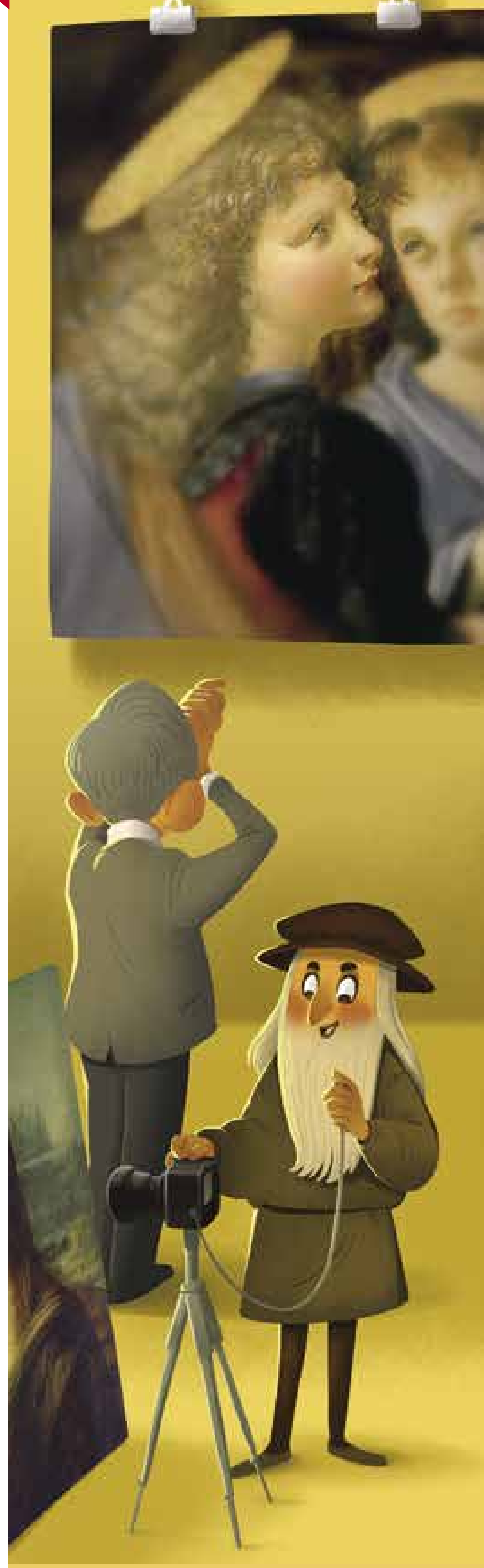
Рис. 2. Строение сетчатки. Центральная часть богата колбочками. Периферическая (боковая) – палочками.

Колбочки и палочки расположены на сетчатке неравномерно: колбочки сосредоточены в центре, а палочки – по краю сетчатки. В самом центре сетчатки находится зона, в которой особенно много колбочек и совсем нет палочек. Эта зона называется *фовея* (рис. 1), что в переводе с латыни означает «ямка». Фовея – зона максимальной остроты зрения. Поэтому та часть изображения, которая попадёт на фовею, будет видеться чётко. Но поскольку фовея очень маленькая, нам приходится перемещать её с одной части изображения на другую, «сканировать» объект. Вот, например, траектория движения глаз при рассматривании профиля Нефертити.



А вот и разгадка великой тайны. Леонардо нарисовал улыбку Джоконды с помощью теней. Эти тени почти невидимы для фовеи, но отлично различаются краями сетчатки. Получается, что когда мы смотрим на глаза, нос, брови, мы видим эти тени, и Мона Лиза улыбается. Но как только мы переводим нашу фовею на кончики губ, эти тени пропадают, и Мона Лиза уже не улыбается. Получается, что она как бы играет с нами.





Художник Мария Усеинова

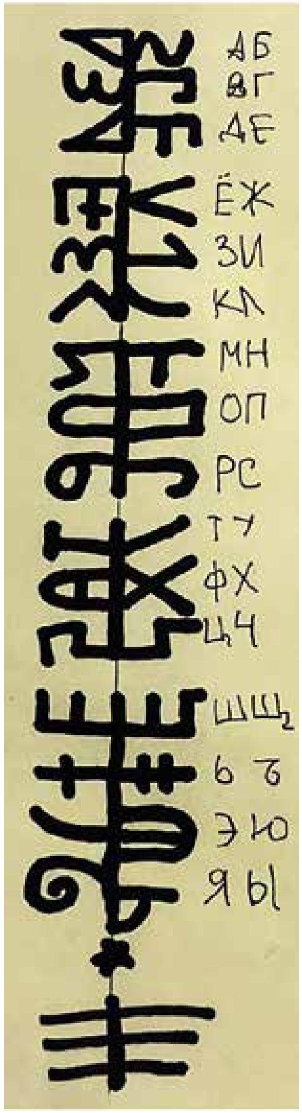
слоВечки
выпуск 18

Сергей Федин

Русские иероглифы

Хорошая штука, конечно, иероглифы. И красивые они, и удобные. Считается, что те, кто пишет иероглифами, легче осваивают работу с компьютером. Ещё бы! Ведь на экране полно всяческих значков, в чём-то похожих на иероглифы.

Но с другой стороны, есть в иероглифах недостаток. Нам, например, для того чтобы научиться читать, достаточно выучить 33 буквы, а потом научиться складывать их в слоги, а слоги – в слова. И всё! А вот, скажем, китайцу, чтобы научиться хорошо читать и стать образованным человеком, нужно выучить несколько тысяч иероглифов! Это всё равно, что выучить сто таблиц умножения!



Но даже образованный китаец, увидев новый иероглиф, не сможет его прочитать. Ведь он же никогда его не видел! Нам в этом смысле проще. Даже если мы увидим какое-нибудь незнакомое слово, например, *ерундопель*, то мы всегда сможем его прочитать, даже если не знаем, что оно означает. Вот и получается, что у одной письменности одни достоинства, у другой – другие.

«Непорядок!» – подумали мы с моим другом Владимиром Бусленко и решили создать новый вид иероглифов – такие, которые можно прочитать. Мы назвали их *иерус*, то есть ***ие**роглифы **рус**ские*.

Идея написания таких иероглифов очень проста. Каждое слово на иерусе составлено из половинок букв (или других значащих частей), которые прикрепляются сбоку к вертикальной палочке. Вот посмотри, как эту идею применил на практике Володя Бусленко.

Сначала он взял русский алфавит и от каждой его буквы оставил половинку (или какую-то существенную её часть). То, что у него получилось, ты видишь на рисунке на предыдущей странице, где все эти половинки букв прикреплены сбоку к одной длинной палочке.

Смотри, в самом верхнем ряду половинка буквы «А» и часть строчной буквы «Б». Причём половинка от «А» слева от вертикальной палочки, а часть от «Б» – справа. В следующем ряду уютно расположились половинка от буквы «В» (она слева от палочки и похожа на заглавную письменную «Е», которая вдруг решила поваляться на спине) и буква «Г» целиком. Ну и так далее.

В самом последнем, нижнем, ряду прицепились к палочке половинки от букв «Я» и «Ы». Теперь уже, зная алфавит иеруса, можно писать на нём простые иероглифы. Вот, например, как выглядит иероглиф, обозначающий слово «спасибо».

Читать его надо слева направо и сверху вниз, по строчкам.

И действительно, в верхнем ряду идут половинки от букв «С» и «П», во втором – половинки от букв «А» и «С». Значит, уже получается СПАС. Читаем дальше: в третьем ряду – половинки от букв «И», «Б», а в четвёртом – половинка от буквы «О» и крестик, заполняющий пустое пространство, для красоты. В итоге получается слово СПАСИБО.

Теперь переверни страницу и посмотри, как выглядят на иерусе в исполнении В. Бусленко иероглифы, обозначающие имена нескольких знаменитых людей[1]. Проверь, правильно ли записан иероглиф «Державин». Не знаю, как тебе, а мне эти косматые иероглифы напоминают маленьких забавных инопланетян, пляшущих какой-то свой космический танец...

[1] В некоторых из этих и последующих иероглифов для удобства и пущей красоты мягкий знак после согласной буквы пишется не отдельным значком с другой стороны вертикальной черты, а поперечной палочкой, пересекающей эту согласную букву.

Ричардсон Державин Тьеполо Гольдони Ньютон

Но, конечно, на иерусе можно писать не только отдельные слова, но и целые предложения, а также более длинные тексты. На этой тарелке, к примеру, Володя написал отрывок стихотворения «Заповедь» английского поэта и писателя Киплинга (это именно тот Киплинг, который написал сказку про Маугли)[2]. По-моему, получилось здорово!

[2] Вот этот отрывок в переводе М. Л. Лозинского:

Владей собой среди толпы смятенной,
Тебя клянущей за смятенье всех,
Верь сам в себя наперекор вселенной,
И маловерным отпусти их грех.

Отрывок начинается с иероглифа в левой нижней части тарелки, отмеченного точкой. Добавлю, что, записывая этот текст по краю деревянной тарелки, автор надписи пробовал разные способы записи иероглифов – в одних случаях он перескакивал на другую сторону палочки «по буквам», а в других – по слогам, парам букв и т.д. Поэтому не надо относиться к буквальной точности записи слишком строго – иерус пока ещё слишком молодой вид письменности и находится в процессе эволюции…

Конечно же, иерус не единственный способ «выращивать» русские иероглифы. Скажем, другой мой хороший знакомый, художник Сергей Орлов, тоже увлёкся ими, но писал их по-другому, не так, как в иерусе. Он просто брал русские слова и записывал каждое эдаким комочком, похожим на китайский иероглиф. Вот, например, слово ЧЕЛОВЕК, записанное таким образом. Видишь, сверху идёт буква «ч», чуть ниже и сбоку буква «е» (она в виде трёх горизонтальных палочек), затем распласталась буква «л». Под ней, как в палатке, прячется буковка «о». Ну, а на первом этаже всей этой «китайской» конструкции стоит слово «век». Вот и получается, что этот как бы иероглиф означает слово «человек».

Теперь уже понятно, как из таких слов с китайским «акцентом» составляют предложения.

Попробуй-ка прочитать написанную слева фразу. Это сокращённый вариант знаменитой фразы великого русского писателя Антона Чехова. В случае чего ответ найдёшь на этой же странице в сноске[3].

Ну а закончить этот увлекательный разговор про русские иероглифы мне хочется фразой, написанной в правом столбике. Уверен, что ты легко разгадаешь её и потом будешь не раз вспоминать на уроках русского языка.

[3] Вот что написано в левом столбике: «Всё должно быть прекрасно – и душа, и мысли». А вот полный вариант чеховской фразы: «В человеке должно быть всё прекрасно: и лицо, и одежда, и душа, и мысли».

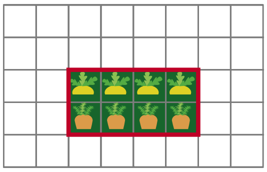
Художник Елизавета Сухно

Виталий Иванов

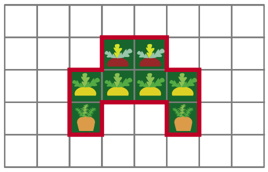
ОГОРОД ПОТАПЫЧА

В далёкой сказочной стране жили-были два огородника – Потапыч и Усатыч. Очень они заботились о своих огородах, а жизнь им всё время задачи подкидывала. Хотите узнать какие? Тогда читайте дальше!

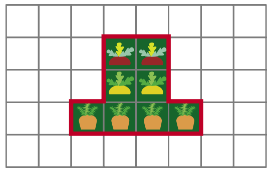
Задача 1. Когда Потапыч только начинал огородное дело, ему предложили на выбор три варианта участка (смотрите картинки А, Б и В ниже). У Потапыча было всего 15 метров забора. В каких случаях он сможет огородить свой огород (на схеме одна клеточка соответствует одному квадратному метру)?



А



Б



В

К сожалению, эти участки располагались близко к городу, так что Потапычу пришлось искать другие места. В конце концов он нашёл тихое и спокойное поселение, где и стал устраивать огород. Только Потапычу нужен огород как можно большей площади.

Задача 2. Придумайте для Потапыча такой огород, чтобы его площадь была не меньше 12 квадратных метров, а имея 15 метров забора, он смог бы оградить свой участок.

Через несколько месяцев счастливой жизни (посаженные на новом месте помидоры уже успели застенчиво покраснеть, а морковки расправили свои пышные косы) на пороге дома появился старинный друг.

Задача 3. Друг Потапыча – Усатыч – тоже переехал. Когда Потапыч пошёл в гости к Усатычу, он заметил, что у них огороды имеют одинаковую площадь. За чашкой чая Усатыч похвастался, что длина его ограждения вдвое больше, чем у Потапыча. Могло ли это быть правдой?

Задача 4. Потапыч завёл два участка одного периметра – квадратный и прямоугольный. И задумался – можно ли заранее сказать, у какого из них площадь больше? Помогите Потапычу!

Задача 5. А Усатыч подзадоривает – рассказал, что у него есть два прямоугольных огорода. Но у одного площадь больше, а у другого – периметр. «Не может такого быть!» – удивился Потапыч. А Усатыч знай посмеивается. А вы как думаете? Кто прав?

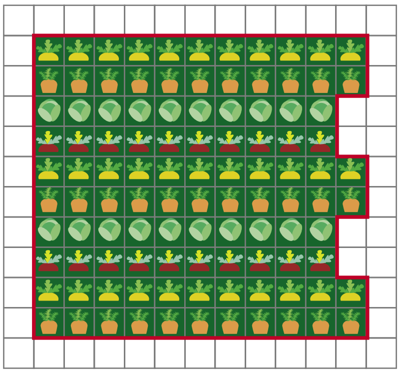
Однажды попалась Потапычу с Усатычем в газете заметка про остров в далёком море, где раздолье для огородников. И загорелись друзья новой идеей – поехать на этот остров выращивать для туземцев невиданную ими ранее морковку и тыкву.

Задача 6. Усатыч купил участок на острове и огородил его забором длины 16 метров. Какая максимальная площадь участка могла получиться?

Задача 7. Вдохновлённый Усатычем Потапыч тоже купил участок на том же острове и огородил его забором длиной 30 метров. Какая максимальная площадь участка могла получиться?

Задача 8. Неожиданно на острове издали закон, по которому площадь огорода должна быть не меньше 144 квадратных метров. Потапыч с Усатычем решили создать общий огород, сложив вместе свои заборы. Смогут ли они выполнить закон?

Задача 9. Потом Потапыч с Усатычем решили создать общий огород, как на картинке. Отвечает ли требованиям закона их огород?



Задача 10. Измучившись, Потапыч с Усатычем купили ещё 2 метра забора. Можно ли теперь огородить огород, не нарушая закон?

Художник Анна Горлач

Игорь Акулич

ЭКОНОМИЧНОЕ ЗАНЯТИЕ

– Сегодняшнее занятие нашего математического кружка назовём *экономичным*.

– Деньги будем считать?

– Нет, *трудозатраты* в простейших геометрических построениях циркулем и линейкой.

Напомню, что взяв линейку, мы можем выбрать две любые точки и провести через них прямую. Взяв же циркуль, мы можем измерить им расстояние между двумя любыми точками, а потом поместить остриё циркуля в любую точку и провести окружность, радиус которой равен этому расстоянию. Иногда, чтобы не загромождать чертёж, проводят не окружность целиком, а только её часть, то есть дугу.

А теперь задача: на плоскости даны прямая l и точка M вне её. Кто построит циркулем и линейкой перпендикуляр p к прямой l, проходящий через точку M?

– Я!

– Я!

– ...

– Вижу, что все готовы. Давайте вы, пожалуйста!

– Сначала выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом MA с центром в точке M, пересекающую прямую l ещё и в точке B (синяя окружность на рисунке 1). Затем проводим ещё две окружности *одинакового радиуса* с центрами в точках A и B (красные окружности на рисунке 1). Через точку N пересечения красных окружностей и точку M проводим прямую – это и будет перпендикуляр p.

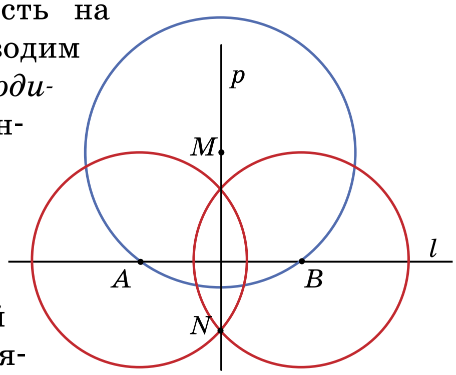


Рис. 1

– Что ж, построение безупречно. Но есть несколько вопросов. Во-первых, можете ли вы *доказать*, что прямая p – действительно перпендикуляр к прямой l?

– Конечно. Соединим точки так, чтобы получился четырёхугольник $AMBN$ (рис. 2). Стороны треугольников MAN и MBN соответственно равны (по построению). Значит, и сами треугольники равны и «приложены» с разных сторон к общей стороне MN. Поэтому они симметричны друг другу относительно MN. А из симметрии точек A и B следует, что они лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Так что $AB \perp MN$.

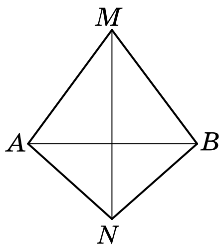


Рис. 2

– Верно. Добавлю, что четырёхугольник, у которого две соседние стороны равны между собой и две другие тоже равны, называется *дельтоид*. Как раз таков четырёхугольник $AMBN$ (в нём $MA = MB$ и $AN = BN$). И здесь вы между делом доказали, что *диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны*.

Теперь второй вопрос: а если синяя окружность пересекла прямую l *только в одной точке* A (иначе говоря, точки B и A совпали)? Тогда мы не сможем провести две красные окружности. Как здесь быть?

– Я понял! Если синяя окружность имеет с прямой l лишь одну общую точку, то прямая *касается* окружности. Так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, отрезок MA *перпендикулярен* прямой l. То есть надо сразу провести прямую через точки M и A – это и будет искомый перпендикуляр.

– Прекрасно. Отмечу только, что так удачно выбрать наугад из *бесконечного* количества точек прямой единственную лежащую на перпендикуляре – практически нереально (да и теоретически тоже).

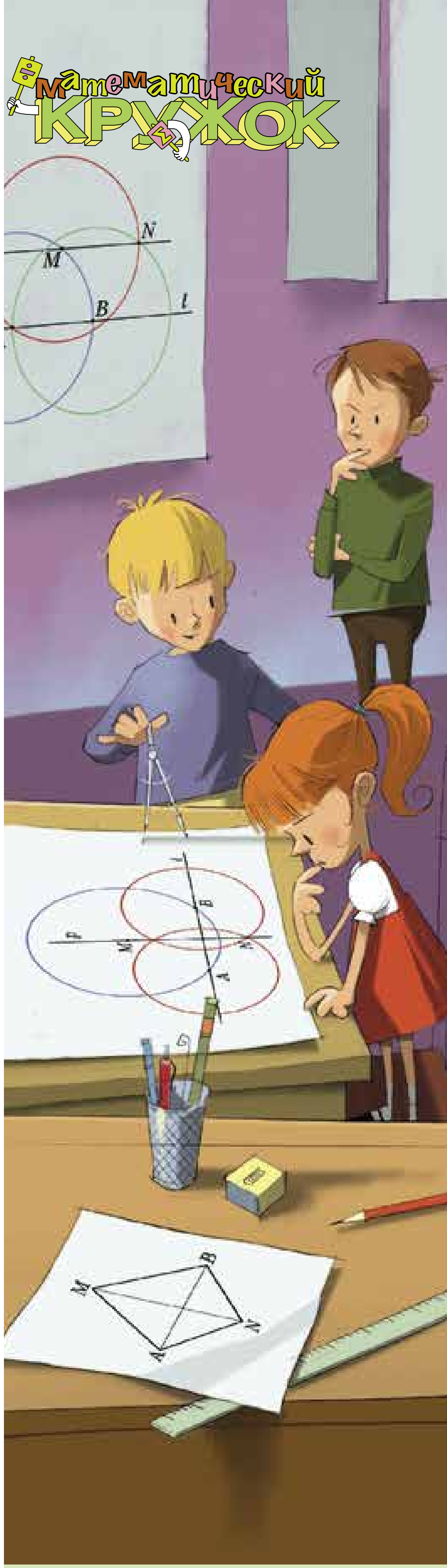
И последний вопрос: как построить перпендикуляр, если точка M лежит на прямой l?

– Точно так же! Проводим синюю окружность, получаем точки A и B – и так далее...

– Что ж, вижу, материал из учебника усвоен вами накрепко. А теперь нечто новое: займёмся *оценкой трудоёмкости* выполненных построений. Давайте считать, что проведение любой линии (прямой или окружности) – это один «ход». Сколько ходов потребовалось для построения перпендикуляра?

– Четыре: три окружности (синяя и две красных) и потом прямая (то есть сам перпендикуляр).

– А можно быстрее! Снова берём прямую l и точку M вне её. Выбираем на прямой l произвольную точ-



ку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 3). Затем выбираем на той же прямой произвольную точку B и проводим окружность радиусом BM с центром в B (красная окружность на рисунке 3). Эти две окружности пересекаются в двух точках, одна из которых – заданная точка M, а вторую обозначим буквой N. Наконец, проводим отрезок MN, который и будет искомым перпендикуляром. Итого – три хода вместо четырёх!

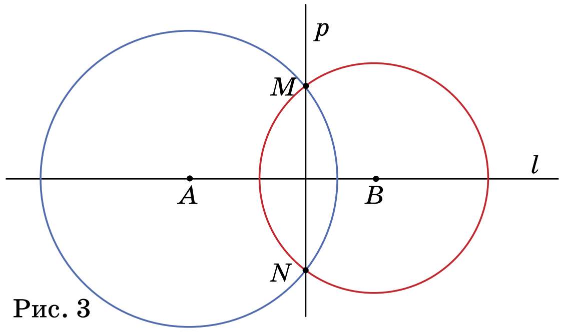


Рис. 3

– А это правда перпендикуляр?

– Конечно. Если мысленно провести отрезки и образовать четырёхугольник $AMBN$, то в нём $AM = AN$ (как радиусы одной окружности) и $BM = BN$ (по той же причине). Значит, $AMBN$ – *дельтоид*, только «лежащий на боку», и его диагонали перпендикулярны.

– Ничего себе! Но если M лежит на прямой l, этот способ неприменим – ведь тогда окружности касаются друг друга, и второй точки их пересечения нет!

– Вы правы. Но и тут есть иной способ построения, столь же экономный. Итак, пусть точка M лежит на прямой l. Сначала выбираем произвольную точку A вне прямой l и проводим окружность радиусом AM с центром в A. Она пересечёт прямую l ещё в точке B. Через точки A и B проводим прямую, пересекающую окружность в точке N. И проводим прямую MN, которая и есть искомый перпендикуляр p (рис.4).

– ???

– Что, совсем несуразно выглядит? А между тем доказательство тоже очень простое. Из наших построений следует, что BN – диаметр проведённой окружности, а $\angle BMN$ – вписан-

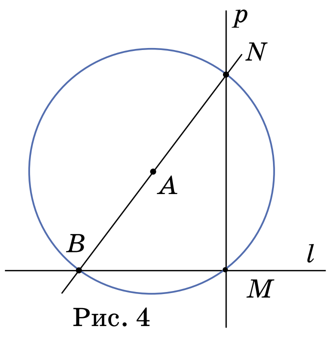


Рис. 4

ный угол, опирающийся на этот диаметр. Но такой угол всегда прямой!

– Ух ты! Но… вдруг нам не повезёт, и мы случайно выберем такую точку A, что окружность не пересечёт прямую l во *второй* точке B, а будет *касаться* её в точке M? Иначе говоря, точки B и M совпадут?

– Наоборот, в случае такого невероятного везения можно сразу провести перпендикуляр AM – ведь если окружность касается прямой, то радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

И последнее на сегодня: как через точку M, лежащую вне прямой l, провести прямую, *параллельную* l?

– Как два перпендикуляра! То есть сначала провести какой-нибудь перпендикуляр к прямой l, а потом – перпендикуляр к этому перпендикуляру, проходящий через ту же точку M.

– И сколько ходов для этого понадобится?

– Ну… если проводить перпендикуляры так, как говорится в учебнике, то это будет $4+4=8$ ходов, а если вашими «экономными» способами, то $3+3=6$.

– А можно обойтись лишь тремя ходами.

– Как?

– Показываю. Выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 5). Она пересечёт прямую l в точках B и C. Далее, строим окружность (красную) радиусом, равным BM, с центром в C. Она пересекается с синей окружностью в точке N (вообще-то таких точек две; надо выбрать ту, что лежит по ту же сторону от l, что и M. Наконец, проводим прямую через точки M и N – она параллельна l.

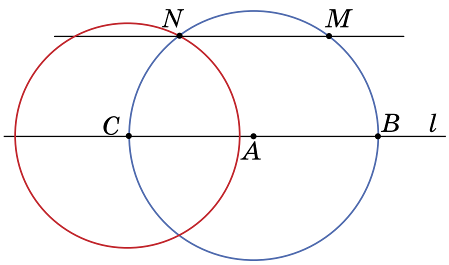
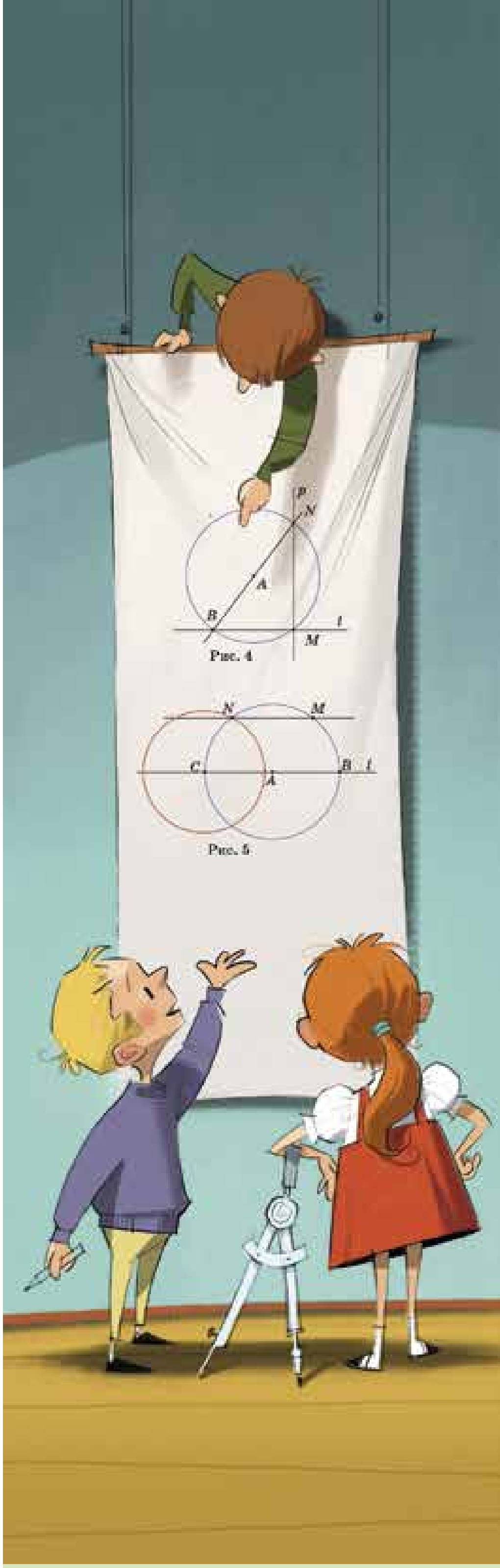


Рис. 5

– Почему?

– Доказательство несложно и основано на симметрии. Если мысленно провести перпендикуляр к прямой l через центр синей окружности A, то полуокружности справа и слева будут симметричны между собой относительно него. И равные дуги BM и CN тоже симметричны. Значит, и точки M и N симме-



тричны, откуда отрезок MN *перпендикулярен к перпендикуляру* к прямой l, то есть параллелен l. Всё!

– А почему дуги BM и CN равны?

– Так они же стягиваются равными хордами – отрезки BM и CN по построению равны.

– Здорово! А если N и M совпадут? Тогда мы не сможем провести через M и N *единственную* прямую.

– Верно. Это может произойти, если точка A окажется точнёхонько на перпендикуляре к прямой l, проходящем через точку M. Такое событие тоже практически невероятное, но здесь это не удача, а, наоборот, неприятность. Поэтому пренебрегать ею нельзя. И в качестве альтернативы могу предложить способ чуть длиннее, из четырёх шагов. Начало такое же: выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 6). Она пересечёт прямую l в точке B (здесь используем только одну из двух точек пересечения – любую). Далее, строим ещё две окружности такого же радиуса с центрами в точках M и B (красная и зелёная соответственно). Они пересекаются в точке N. Наконец, проводим прямую через точки M и N – она параллельна l. Доказательство несложно: если рассмотреть четырёхугольник $ABNM$, то по нашим построениям все его стороны равны, потому что они – радиусы одинаковых окружностей. Значит, $ABNM$ – ромб, а у ромба противоположные стороны параллельны. Вот и всё! Ну как, понравились сегодняшние построения?

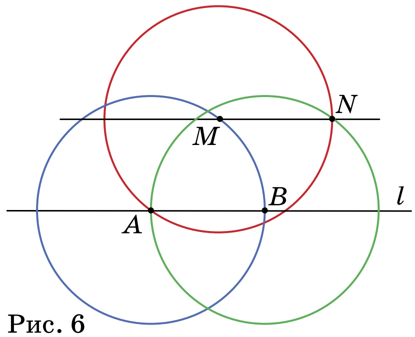


Рис. 6

– Красиво!

– Быстро!

– Я рад, что они вам по вкусу. Пользуйтесь на здоровье. Но имейте в виду – эти *экономичные* построения не очень-то широко известны, и вы должны быть готовы подтвердить их справедливость безупречным доказательством. Особенно на экзамене. Поэтому не забывайте и «классические» способы. Они тоже хороши, а главное – понятны и практически очевидны.

Художник Алексей Вайнер

ОТРАЖЕНИЯ В КРАНЕ

Я сфотографировал своё отражение в кране. Почему оно перевёрнутое? Откуда взялось второе, маленькое отражение?

Помогите Квантику повторить эксперимент и ответить на вопросы.

Автор Григорий Гальперин

Художник Мария Усеинова

Владимир Красноухов

АНТИСЛАЙД В РАМКЕ

Эта головоломка состоит из игровых элементов и игрового поля, ограниченного рамкой.

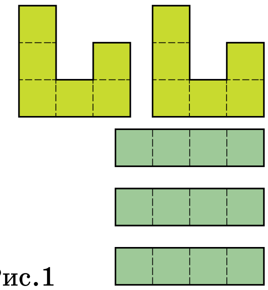


Рис.1

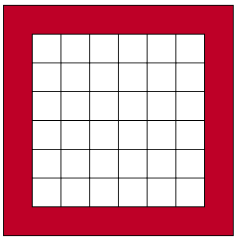


Рис.2

Игровые элементы – гексамино (2 шт.) и тетрамино (3 шт.), их форма показана на рисунке 1. Рамка (рисунок 2) имеет внутренние размеры 6 × 6 клеточек-«мино». Впрочем, нам понадобятся также рамочки с внутренним размером 6×7, 6×8, 6×9.

ЗАДАЧИ.

1. Разместите все игровые элементы внутри рамки в режиме *антислайд*, то есть так, чтобы ни один из них не мог быть сдвинут ни в какую сторону ни на один шаг (*anti* – против, *slide* – скользить). Для рамки с размером 6 × 6 эта задача имеет два решения, одно из них мы приводим на рисунке 3, а второе найдите самостоятельно.

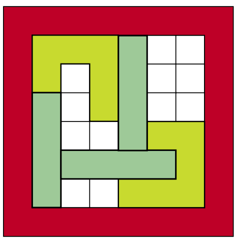


Рис.3

2. А теперь более сложные задачи. Попробуйте разместить игровые элементы в режиме антислайд в рамках 6×7, 6×8, 6×9.

После первых попыток решить эту задачу для рамки 6 × 9 обычно создаётся впечатление, что «игровое поле слишком велико» или «строительного материала явно недостаточно»... Но автор этой головоломки (В. Красноухов) утверждает, что существует уникальное решение. И оно будет красивым (но это уже подсказка).

Кстати, это одна из тех задач, которые решали финалисты 18-го открытого очного Чемпионата России по пазлспорту (Москва, 12 июня 2015 года). Более половины участников этих соревнований уложились в отводимые на решение этой задачи 10 минут. У вас же запас времени не ограничен никаким регламентом. Желаем успехов!

Художник Мария Усеинова

XL ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

3 и 17 марта 2019 года прошёл весенний тур XL Международного математического Турнира Городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1 (3 балла). В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

Александр Шаповалов

2 (4 балла). По кругу лежат $2n+1$ монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n+1$ переворотов: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

Владимир Расторгуев

3 (4 балла). Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m+n \leqslant n^2$.

Борис Френкин

4 (5 баллов). В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

Игорь Жижилкин

5 (5 баллов). Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Константин Кноп

Сложный вариант

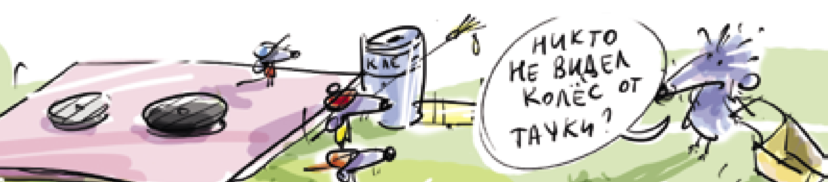
1 (5 баллов). Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

Михаил Евдокимов

2 (7 баллов). На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Сергей Дориченко

3 (7 баллов). К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера – серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не



в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

Егор Бакаев,
Павел Кожевников,
Владимир Расторгуев

4 (8 баллов). Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

Илья Богданов

5 (9 баллов). В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, – в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

Александр Грибалко

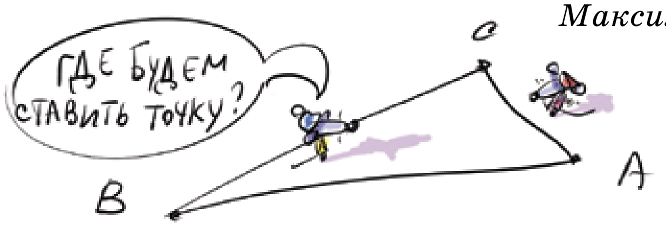
6 (9 баллов). Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и угол KAC равен 30°. Найдите угол AKB.

Егор Бакаев

7 (12 баллов). Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

Максим Дидин

Художник Сергей Чуб



!
Открыта регистрация
на XXV юбилейный Турнир
математических боёв
имени А. П. Савина

Подробная информация –
www.tursavin.ru/info2019.html

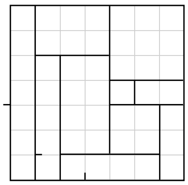
НАШ КОНКУРС, VII ТУР

(«Квантик» № 3, 2019)

31. *По окружности расставили числа 1, 2, 3, … , 100 так, что любые два соседних числа отличаются не более чем на 2. Могут ли при этом числа 50 и 51 не быть соседями друг друга?*

Ответ: могут. Расставим числа так: 2, 4, 6, …, 100, 99, 97, 95, …, 1 (сначала все чётные числа в порядке возрастания, а потом нечётные в порядке убывания). На самом деле такая расстановка единственна (с точностью до поворота и направления обхода).

32. *Клетчатый квадрат 7×7 разрезали по линиям сетки на различные прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться?*



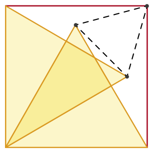
Ответ: 10 (см. пример на рисунке). Больше нельзя, потому что сумма площадей 11 прямоугольников с наименьшими площадями равна $1\times 1+1\times 2+1\times 3+1\times 4+2\times 2+1\times 5+1\times 6+2\times 3+1\times 7+1\times 8+2\times 4=54>49=7\times 7$.

33. *Каждый из кандидатов в мэры либо лжец (всегда лжёт), либо правдолюб (всегда говорит правду), и все кандидаты знают, кто есть кто. В начале дебатов каждый из 25 кандидатов заявил: «Среди остальных присутствующих кандидатов лжецов больше, чем правдолюбов». После того как подошёл опоздавший 26-й кандидат, каждый из кандидатов повторил своё заявление. Кем является опоздавший: лжецом или правдолюбом?*

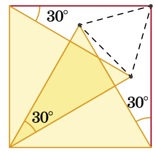
Ответ: правдолюбом. Если до прихода опоздавшего кандидата было меньше 12 правдолюбов, то все остальные – лжецы, сказавшие правду, что невозможно. Если же было меньше 13 лжецов, то остальные – солгавшие правдолюбы, что также невозможно. Значит, изначально было 12 правдолюбов и 13 лжецов.

Аналогично, после прихода опоздавшего стало 13 правдолюбов и 13 лжецов. Значит, опоздавший – правдолюб.

34. *Два жёлтых равносторонних треугольника расположены в квадрате, как показано на рисунке. Докажите, что три выделенные точки образуют равносторонний треугольник.*



Найдите на картинке три равных равнобедренных треугольника с углом 30° при вершине и боковыми сторонами (оранжевыми), равными стороне квадрата. Их основания (штриховые линии) – это стороны равностороннего треугольника.



35. *По кругу выкладывают 30 одинаковых на вид таблеток, из них 20 хороших и 10 плохих. Два мудреца по очереди берут по одной таблетке. Первый мудрец будет знать, где лежат плохие таблетки, а второй – нет, но они хотят до выкладывания таблеток договориться, как после каждого хода первого второй найдёт хорошую таблетку. После 20 ходов на столе должны остаться 10 плохих таблеток. Предложите алгоритм действий для мудрецов. (Беря таблетки, мудрецы не общаются и не подают никаких знаков. Каждый видит, какую таблетку взял партнёр.)*

Будем обходить таблетки по часовой стрелке, тогда обязательно найдутся две хорошие таблетки рядом, сразу за которыми лежит плохая. Первый мудрец берёт первую таблетку, второй – вторую, а третья (плохая) запоминается и мысленно выбрасывается. После чего задача сводится к такой же с меньшим числом таблеток, причём отношение хороших таблеток к плохим неизменно – 2 к 1, и алгоритм повторяется.

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

1. Ответ: 5. Подсчитаем вероятность того, что у всех разные знаки зодиака. Для группы из одного человека она равна 1, из двух – $1\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{12}$, из трёх – $\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{55}{72}$, из четырёх – $\frac{55}{72}\cdot\frac{9}{12}=\frac{55}{96}$, из пяти – $\frac{55}{96}\cdot\frac{8}{12}=\frac{55}{144}$, что меньше 0,5.

2. Ответ: $\approx 2\%$.Если учитывать високосные годы, то вероятность родиться 29 февраля – примерно $\frac{1}{4}:365\frac{1}{4}=\frac{1}{1461}$. Тогда вероятность, что из остальных 29 человек никто не родился 29 февраля, будет $\left(\frac{1460}{1461}\right)^{29}\approx 0{,}98$.

3. Ответ: 61 человек. Вероятность, что у данного человека уникальный день рождения, будет $\left(\frac{364}{365}\right)^{74}\approx 0{,}82$. Итого $75\cdot 0{,}82\approx 61$ человек.

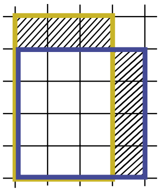
ОГОРОД ПОТАПЫЧА

1. Ответ: А, В.

2. Ответ: прямоугольник 3×4.

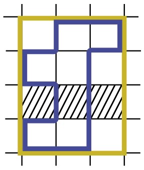
3. Ответ: могло. Например, у Потапыча огород – прямоугольник 3×5, а у Усатыча – 1×15.

4. Ответ: площадь больше у квадратного. Пусть у прямоугольного участка длины сторон различаются хотя бы на 2. Тогда мы можем длинную сторону уменьшить на 1, а короткую увеличить на 1 (см. рисунок). Периметр не изменится, а площадь увеличится на новую длинную сторону и уменьшится на старую короткую – то есть возрастёт хотя бы на 1. Поскольку из данного забора можно составить квадрат, его периметр делится на 4, и у прямоугольного участка разность сторон чётна – хотя бы 2.



5. Ответ: Усатыч мог быть прав – например, если у него есть участки 4×4 и 1×15.

6. Ответ: 16 квадратных метров. Через самую правую и левую вертикальные стороны участка, а также через самую верхнюю и нижнюю горизонтальные стороны участка проведём по прямой – получится прямоугольник, содержащий участок (как на рисунке).



При этом периметр прямоугольника не будет превышать периметр участка. Действительно, каждая горизонталь (полоска в 1 клетку) прямоугольника пересекает участок и тем самым содержит хотя бы два вертикальных одноклеточных куска границы. Аналогично каждая вертикаль содержит хотя бы два горизонтальных одноклеточных куска границы. При этом для прямоугольника на каждую горизонталь и вертикаль приходится ровно по два куска границы.

Итак, можем считать участок прямоугольным, причём максимальная площадь будет у квадрата 4×4, см. задачу 4.

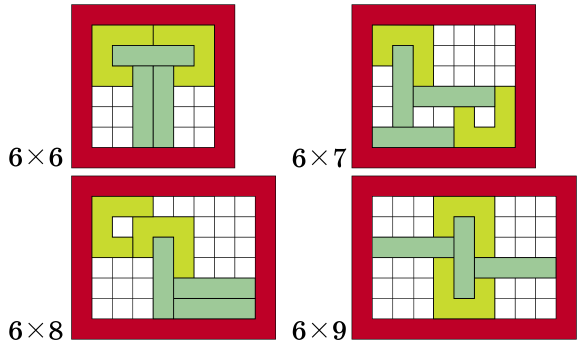
7. Ответ: 56. Как мы выяснили в задаче 6, участок максимальной площади можно взять прямоугольным. А в задаче 4 мы выяснили, что разность сторон должна быть меньше 2. Поскольку 30 не делится на 4, квадрат мы получить не можем. Значит, это прямоугольник 7×8 – у него разность сторон равна 1.

8. Ответ: не смогут. Сумма длин заборов Усатыча и Потапыча равна 46. Рассуждая, как в решении задач 6 и 7, докажите самостоятельно, что площадь их участка меньше площади квадрата 12×12.

9. Ответ: нет, так как площадь участка равна 106, что меньше, чем 144.

10. Ответ: да, они огородят квадрат 12×12.

АНТИСЛАЙД В РАМКЕ

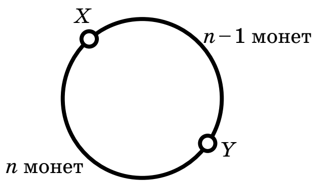


XL ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 классы

Базовый вариант

1. Ответ: могло. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Докажите, что больше 11 чисел не могло быть выписано.

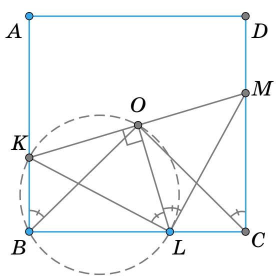
2. Пусть $(n-1)$-я перевёрнутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n-1$ монет, а раз всего монет в круге $2n+1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n+1)$-й мы снова перевернём монету X.



И далее будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n+1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой $n-2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n-2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой 1 монету. А последние два раза перевернём одну и ту же монету. В итоге решкой вверх будет лежать только Y – её переворачивали нечётное число раз, а остальные монеты – чётное.

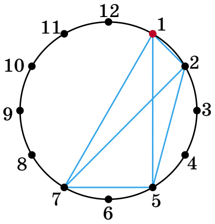
3. Так как $n^2 = n(m+n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m+n$. Значит, $n^2 \geqslant m+n$.

4. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок). Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности



с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично, $\angle MCO = \alpha/2$. Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM.

5. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

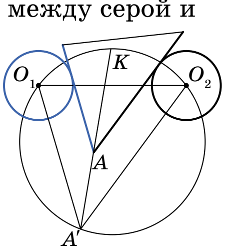
Решите ту же задачу для 13 шкатулок.

Сложный вариант

1. Ответ: могут. Если первый назвал число 22, то второй может однозначно определить все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

2. Назовём самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

3. Точки биссектрисы угла A между серой и чёрной сторонами деревянного треугольника равноудалены от этих сторон (серый цвет изображаем синим). Проведём через центры O_1 и O_2 серого и чёрного кругов прямые, параллельные этим сторонам.



Пусть они пересекаются в точке A'. Поскольку угол $O_1A'O_2$, равный углу A, постоянен, описанная окружность Ω треугольника $O_1A'O_2$ не зависит от положения деревянного треугольника.

Прямая l, содержащая биссектрису угла $O_1A'O_2$, проходит тогда через фиксированную точку K – середину дуги O_1O_2окружности Ω.

С другой стороны, точки прямой l равноудалены от прямых O_1A' и O_2A', а серая и чёрная стороны «отодвинуты» соответственно от O_1A' и O_2A' на одно и то же расстояние в сторону точки K (так как радиусы серого и чёрного кругов равны), откуда прямая l содержит и биссектрису угла A деревянного треугольника.

4. Ответ: $\frac{1}{2}$. Пусть в вершинах по кругу расставлены числа $x_1, \ldots, x_{100}$, и пусть k – сумма «красных» чисел, а s – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j разной чётности и $i<j$, а сумма синих равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j одной чётности и $i<j$; кроме того $x_1^2+x_2^2+\ldots+$ $+\,x_{100}^2 = 1$. Заметим теперь, что выражение $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{99} - x_{100})^2$ равно $1-2k+2s$ и неотрицательно, откуда $k-s \leqslant \frac{1}{2}$. Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = \frac{1}{10}$.

5. Ответ. При всех чётных n.

Пронумеруем столбцы и строки от 1 до n соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была чёрной.

Пусть n – чётное. Заполним таблицу числами от 1 до n^2 так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему, и т. д. В итоге число n^2 окажется прямо под 1, см. пример для $n=6$ на левом рисунке.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

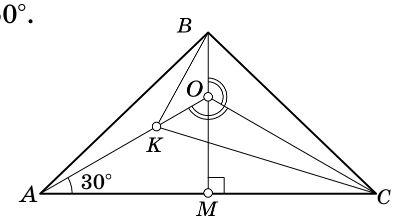
Заменим теперь числа на их остатки по модулю n: 0, 1, ..., $n-1$ (см. правый рисунок). Докажите самостоятельно, что они расставлены следующим образом: для нечётного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего чётного столбца и вторым числом следующего нечётного.

Значит, каждый столбец начинается с остатка i, равного своему номеру, кроме n-го, который начинается с нуля, причём в чётных столбцах остатки идут по возрастанию с i до $n-1$, а потом с нуля до $i-1$, а в нечётных – по убыванию с i до 0, а потом с $n-1$ до $i+1$.

Докажем, что в каждом столбце все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной чётности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в чётном столбце, а второй – в нечётном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать, противоречие.

Пусть нам удалось расставить числа требуемым образом для нечётного n. Тогда для каждой белой клетки сумма номеров строки и столбца, в которых она находится, нечётна, а для чёрной – чётна. Если же мы возьмём такие суммы по всем числам с одинаковым остатком по модулю n, то учтём каждый столбец и каждую строку ровно один раз и в сумме получим $2 \cdot n(n+1)/2$, то есть чётное число. Значит, среди чисел с одинаковым остатком чётное количество находится на белых клетках. Но для каждого числа с остатком 1 следующее за ним число имеет остаток 2 и стоит на клетке противоположного цвета. Значит, на чёрных клетках стоит чётное количество чисел с остатком 2 и всего чисел с остатком 2 чётно, противоречие.

6. Ответ. $150°$. Пусть высота BM треугольника ABC пересекается с прямой AK в точке O (см. рисунок). Тогда $\angle COM = \angle AOM = 60°$. Значит, $\angle AOC = 120°$ и $\angle COB = 120°$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них (так называемый четвёртый признак равенства треугольников). Поэтому $OB = OK$, то есть треугольник BOK равнобедренный с углом $120°$ при вершине O. Поэтому $\angle OKB = 30°$, а $\angle AKB = 150°$.



7. Ответ. 3920000.

Оценка. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причём из выбранных кучек Петя берёт верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \ldots + |a_{39999} - a_{40000}|$, где a_i – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма S ста чисел 400, ста чисел 399, ..., ста двоек и ста единиц, причём ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовём числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение S, очевидно, достигается, когда все большие числа входят в неё со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна $100(400+399+\ldots+201-200-199-\ldots-1) = 100((400-200)+(399-199)+\ldots+(201-1)) = 100 \cdot 200^2$.

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком минус: это произойдёт, например, в тот момент, когда Петя *в первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает $99(400+399+\ldots+201) - 99(200+199+\ldots+1) - (400+399+\ldots+201) + (200-199-\ldots-1) = 98 \cdot 200^2 = 3920000$.

Пример. Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвёртой, третьей и шестой, ..., 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец остаётся по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 100 знаков плюс перед числами с 200 по 1).

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IX тура, с которыми справитесь, не позднее 1 июня в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IX ТУР

41. Вставьте в пустые клетки различные числа от 1 до 10 так, чтобы получилось верное равенство:

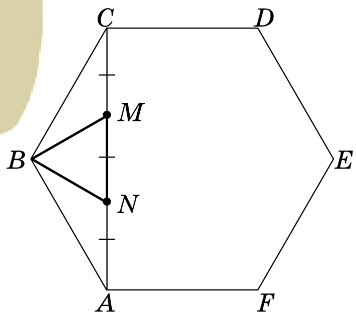
$$\square+\square\times\square+\square\times\square\times\square+\square\times\square\times\square\times\square=5167.$$

42. На расстоянии 9 км друг от друга стоят шарикометатель и игломёт. Шарикометатель выпускает по воздушному шарику каждую минуту. Каждый шарик летит по прямой со скоростью $2\frac{1}{3}$ км/мин в направлении игломёта. Как только шарик оказывается в зоне поражения – на расстоянии не более 5 км от игломёта, – игломёт мгновенно его подстреливает. Правда, игломёту после каждого выстрела нужно $1\frac{2}{3}$ минуты, чтобы перезарядиться. Если в зоне поражения несколько шариков, лопается только ближайший к игломёту.

Какой по счёту шарик всё-таки долетит до игломёта?

Авторы: Константин Кноп (41), Марк Пименов, 5 кл. (42), Егор Бакаев (43), Михаил Евдокимов (44), Юрий Чеканов (45)

43. Ребята два дня решали задачи. В первый день Петя решил задач в 2 раза меньше Васи и в 3 раза меньше Маши. Во второй день Маша решила задач в 2 раза меньше Пети и в 1,5 раза меньше Васи. Может ли быть так, что Вася решил больше задач, чем каждый из других ребят?



44. Точки M и N делят диагональ AC правильного шестиугольника $ABCDEF$ на три равные части. Докажите, что треугольник MBN равносторонний.

45. В шахматной доске 8×8 вырезали центральный квадрат размером 2×2 клетки.

а) Какое наибольшее число ферзей, не бьющих друг друга, можно поставить на получившуюся доску? Приведите пример расстановки и докажите, что большее число ферзей расставить нельзя.

б) Сколько всего таких расстановок? Нарисуйте их все и докажите, что других нет.

(Ферзи бьют друг друга, если они находятся на одной клетчатой линии – вертикали, горизонтали или диагонали – и в этой линии нет вырезанных клеток.)

Художник Николай Крутиков

ШИРИНА ОТРАЖЕНИЯ

Ширина лица человека 15 см. Может ли человек встать перед зеркалом шириной 14 см так, чтобы увидеть отражение всего своего лица? А если ширина зеркала 7 см?

Автор Александр Бердников

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986